Analiza Funkcjonalna
WPPT IIr. semestr letni 2011
WYKŁADY 2 i 3:
PRZESTRZENIE UNORMOWANE i BANACHA
BAZA TOPOLOGICZNA

29/03/11

Definicja. Normą w przestrzeni liniowej V nazywamy funkcję $\|\cdot\| : V \to [0, \infty)$ spełniającą warunki (zwane aksjomatami normy):
1. $\|v\| = 0 \iff v = \mathbf{0}$
2. $\|v + u\| \le \|v\| + \|u\|$ (podaddytywność)
3. $\|av\| = |a|\|v\|$ (jednorodność)

Norma zadaje metrykę $d(u, v) = \|u - v\|$. Zamiast mówić, że jakiś ciąg zbiega w metryce zadanej przez normę, będziemy mówić, że ciąg ten zbiega w normie (podobnie będziemy mówić, że funkcja jest ciągła w normie). Na przykład faktem jest, że norma jest funkcją ciągłą w normie.

Definicja. Przestrzeń liniowa unormowana nazywa się przestrzenią Banacha, jeśli jest ona zupełna.

Definicja. Powiemy, że ciąg (v_n) w przestrzeni liniowo-metrycznej **tworzy szereg zbieżny** jeśli ciąg sum częściowych $s_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$ zbieżny jest (w metryce). Granicę tego ciągu s nawiemy **sumą szeregu utworzonego przez** v_n, co zapiszemy jako

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} v_n.$$

Definicja. W przestrzeni unormowanej, ciąg v_n jest **bezwzględnie zbieżny**, jeśli zbieżny jest szereg liczbowy $\sum_{n=1}^{\infty} \|v_n\|$. (UWAGA ciąg taki nie musi być zbieżny).

Twierdzenie. Przestrzeń liniowa unormowana jest zupełna (czyli Banacha) wtedy i tylko wtedy, gdy każdy szereg bezwzględnie zbieżny jest zbieżny.

Dowód: Załóżmy zupełność. Jeśli szereg v_n jest bezwzględnie zbieżny, to ciąg sum częściowych s_n jest podstawowy, bowiem dla $m > n$ mamy

$$\|s_m - s_n\| = \|v_{n+1} + \cdots + v_m\| \le \|v_{n+1}\| + \cdots + \|v_m\| \le \sum_{i=n+1}^{\infty} \|v_i\|,$$

a to, jako ogon szeregu zbieżnego można uczynić dowolnie małym wybierając dostatecznei duże n. Z zupełności ciąg sum częściowych jest zbieżny, a to oznacza zbieżność szeregu tworzonego przez v_n.
Odwrotnie: Załóżmy, że każdy szereg bezwzględnie zbieżny jest zbieżny i weźmy dowolny ciąg podstawowy (v_n). Dla każdego $k \ge 1$ istnieje indeks n_k taki, że $\forall_{n,m \ge n_k}\ \|v_n - v_m\| < 2^{-k}$. Dodatkowo można wybrać ciąg n_k tak, by był on rosnący. Zdefiniujmy $u_k = v_{n_{k+1}} - v_{n_k}$. Mamy $\|u_k\| = \|v_{n_{k+1}} - v_{n_k}\| \le 2^{-k}$ (gdyż oba indeksy n_{k+1} i n_k są $\ge n_k$). Zatem normy elementów u_k tworzą szereg sumowalny, co oznacza, że u_k tworzą szereg bezwzględnie zbieżny, a zatem z

założenia zbieżny. Istnieje więc suma tego szeregu u. Ale suma szeregu, to granica ciągu sum częściowych. Czym jest suma częściowa elementów u_k:

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_k = v_{n_2} - v_{n_1} + v_{n_3} - v_{n_2} + \cdots v_{n_{k+1}} - v_{n_k} = v_{n_{k+1}} - v_{n_1}.$$

Oznacza to, że ciąg $v_{n_{k+1}} - v_{n_1}$ jest zbieżny (po k) do u, a ponieważ v_{n_1} jest stały, to ciąg $v_{n_{k+1}}$ jest zbieżny do elementu $u + v_{n_1}$. Wykazaliśmy, że ciąg v_n ma podciąg zbieżny. Ciąg podstawowy, który ma podciąg zbieżny, cały jest zbieżny, to kończy dowód zupełności. $\square$

PRZYKŁADY PRZESTRZENI BANACHA:
Przestrzenie ciągowe:
1. ℓ^∞ — ciągi ograniczone, z normą supremum (nie jest ośrodkowa)
2. c — ciągi zbieżne, z normą supremum (ośrodkowa)
3. c_0 — ciągi zbieżne do zera, z normą supremum (ośrodkowa)
4. ℓ_1 — ciągi bezwzględnie sumowalne, z normą ℓ_1 (suma szeregu modułów) (ośrodkowa)
5. ℓ_2 — ciągi bezwzględnie sumowalne z kwadratem, z normą ℓ_2 (pierwiastek sumy szeregu kwadratów modułów) (ośrodkowa)
Przestrzenie funkcji ciągłych:
1. $CB(\mathbb{R})$ — funkcje ciągłe ograniczone na $\mathbb{R}$, z normą supremum (nie jest ośrodkowa)
2. $CL(\mathbb{R})$ — funkcje ciągłe na $\mathbb{R}$ posiadające granice w $-\infty$ i w ∞, z normą supremum (ośrodkowa)
3. $C_0(\mathbb{R})$ — funkcje ciągłe na $\mathbb{R}$ zbieżne do zera w $-\infty$ i w ∞, z normą supremum (ośrodkowa)
4. $C(X)$ — funkcje ciągłe na przestrzeni zwartej X, z normą supremum (ośrodkowa)
Przestrzenie funkcji mierzalnych
1. $L^\infty(\mathbb{R})$ — klasy (modulo równość prawie wszędzie) funkcji mierzalnych ograniczonych na $\mathbb{R}$, z normą supremum istotne (nie jest ośrodkowa)
2. $L^1(\mathbb{R})$ — klasy (modulo równość prawie wszędzie) funkcji całkowalnych z modułem na $\mathbb{R}$, z normą L^1 (całka z modułu) (ośrodkowa)
3. $L^2(\mathbb{R})$ — klasy (modulo równość prawie wszędzie) funkcji całkowalnych z kwadratem modułu na $\mathbb{R}$, z normą L^2 (pierwiastek całki z kwadratu modułu) (ośrodkowa)

Powyższe trzy przestrzenie można też wprowadzić na $[0,1]$ (w miejsce $\mathbb{R}$). Różnica jest taka, że teraz mamy miarę skończoną, co zmienia zawierania między tymi przestrzeniami. Na przykład dla miary skończonej każda funkcja ograniczona jest całkowalna z modułem, więc $L^\infty([0,1]) \subset L^1([0,1])$, co nie jest prawdą na $\mathbb{R}$. Podobnie każda nieujemna funkcja całkowalna z kwadratem na $[0,1]$ jest całkowalna bez kwadratu, zatem $L^2([0,1]) \subset L^1([0,1])$, co też nie jest prawdą na $\mathbb{R}$.

NIERÓWNOŚĆ HÖLDERA I NIERÓWNOŚĆ MINKOWSKIEGO, PRZESTRZENIE ℓ^p i L^p

Ustalmy dowolne $p > 1$. Rozważmy zbiór ciągów (x_n) spełniających warunek $\sum_{n=1}^\infty |x_n| < \infty$. Podobnie, na przestrzeni miarowej rozważmy zbiór funkcji f takich, że $\int |f|^p \, d\mu < \infty$. Zauważmy oczywisty fakt, że zbiory te są zamknięte na mnożenie przez skalar. Teraz sprawdzimy, że są one też zamknięte na dodawanie.

Lemat. Jeśli szeregi $|x_n|^p$ i $|y_n|^p$ są sumowalne, to szereg $|x_n+y_n|^p$ też. Podobnie jeśli $\int |f|^p\,d\mu<\infty$ i $\int |g|^p\,d\mu<\infty$, to $\int |f+g|^p\,d\mu<\infty$.

Dowód: Z wypukłości funkcji x^p na liczbach nieujemnych mamy, dla $a,b\geq 0$:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^p(a+b)^p=\left(\frac{(a+b)}{2}\right)^p\leq\frac{a^p+b^p}{2}.$$

Stosując to do $a=|x_n|$ i $b=|y_n|$, sumując po n i mnożąc przez 2^p dostajemy

$$\sum_n|x_n+y_n|^p\leq\sum_n(|x_n|+|y_n|)^p\leq 2^{p-1}\sum_n|x_n|^p+\sum_n|y_n|^p<\infty.$$

Dowód dla funkcji jest identyczny: wstawiamy $a=f(x)$ i $b=g(x)$ i zamiast sumowania jest całkowanie. $\square$

Definicja. Powyższy zbiór ciągów nazywamy przestrzenią ℓ^p, a zbiór klas funkcji (modulo równość prawie wszędzie) nazywamy przestrzenią $L^p(\mu)$ (przestrzenie $L^p(\mu)$ określa się mianem *przestrzeni Lebesgue'a*).

W przestrzeniach tych wprowadzamy normy:

$$\|(x_n)\|_p=\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|\right)^{\frac{1}{p}}$$

oraz

$$\|f\|_p=\left(\int|f|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Warunek zerowy jest oczywisty, jak również to, że są one jednorodne. Aby sprawdzić warunek trójkąta potrzebujemy kilku faktów. Od teraz, przy ustalonym $p>1$ przez q oznaczać będziemy liczbę

$$q=\frac{1}{1-\frac{1}{p}}.$$

Zauważmy, że $q>1$ oraz $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ (co oznacza, że $\frac{1}{p}$ i $\frac{1}{q}$ mogą być współczynnikami kombinacji wypukłej). Liczbę q często określa się mianem *dualnej do p*.

Lemat. (Nierówność Younga) Dla dowolnych nieujemnych a i b zachodzi

$$ab\leq\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}.$$

Dowód: To wynika z wklęsłości logarytmu (i tego, że jest rosnący):

$$\log ab=\frac{1}{p}\log a^p+\frac{1}{q}\log b^q\leq\log\left(\frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q\right)$$ (i teraz zdejmujemy logarytm). $\square$

Twierdzenie. (Nierówność Höldera) Dla dowolnych ciągów liczb nieujemnych (x_n) i (y_n) oraz $p>1$ zachodzi nierówność:

$$\sum_{i=1}^{\infty}x_iy_i\leq\|(x_n)\|_p\|(y_n)\|_q.$$

Podobnie dla dowolnych funkcji nieujemnych f i g na dowolnej przestrzeni miarowej zachodzi
$$\int fg\,d\mu \le \|f\|_p\|g\|_q.$$

Dowód: Nierówność Höldera jest prawdziwa jeśli jeden z ciągów (jedna z funkcji) jest zerowy(a) lub jeśli jeden szereg (jedna całka) po prawej jest nieskończony(a). Zostaje więc przypadek niezerowy skończony.
Ponieważ lewa i prawa strona nierówności Höldera są jednorodne, to możemy obie strony podzielić przez (niezerową) prawą stronę i z dzieleniem wejść pod sumę (całkę) oraz pod normy. Zatem wystarczy nierówność tę dowodzić dla wektorów (lub funkcji) o odpowiednich normach równych 1, czyli takich, że $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^p = 1$ i $\sum_{n=1}^{\infty} y_n^q = 1$ (a w przypadku funkcji $\int f^p\,d\mu = 1$ i $\int g^q\,d\mu = 1$).
Wtedy, stosując nierówność Younga dla każdego n i sumując po n, dostajemy:
$$\sum x_n y_n \le \frac{\sum x_n^p}{p} + \frac{\sum y_n^q}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$
a jedynka po prawej stronie to jest, w przypadku wektorów unormowanych, prawa strona nierówności Höldera. W przypadku funkcji stosujemy nierówność Younga w każdym punkcie przestrzeni miarowej i całkujemy:
$$\int fg\,d\mu \le \frac{\int f^p\,d\mu}{p} + \frac{\int g^q\,d\mu}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \quad \square$$

Twierdzenie. (Nierówność Minkowskiego) Niech $(x_n), (y_n) \in \ell^p$. Wtedy
$$\|(x_n) + (y_n)\|_p \le \|(x_n)\|_p + \|(y_n)\|_p.$$
Analogiczna nierówność zachodzi dla funkcji $f, g \in L^p(\mu)$.

Dowód: Nierówność jest trywialna, gdy po lewej stronie jest zero. Zatem został przypadek, gdy szereg $\sum_n |x_n+y_n|^p$ jest niezerowy (i, jak wiemy, skończony; wtedy można przez niego dzielić). Piszemy tak:
$$\begin{aligned}&\sum |x_n + y_n|^p = \\ &\quad \sum |x_n + y_n|^{p-1}|x_n + y_n| \le \sum |x_n||x_n + y_n|^{p-1} + \sum |y_n||x_n + y_n|^{p-1} \le \\ &\quad \left(\sum |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum |x_n + y_n|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum |y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum |x_n + y_n|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}.\end{aligned}$$
Teraz zauważamy, że $(p-1)q = p$ (bo $(\frac{p-1}{p} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{q})$, czyli możemy uprościć wykładniki po prawej. Następnie dzielimy obie strony przez (skończone i niezerowe) wyrażenie $(\sum |x_n + y_n|^p)^{\frac{1}{q}}$. Po lewej stronie wyjdzie szereg do potęgi $1 - \frac{1}{q}$ a to jest $\frac{1}{p}$, czyli wyjdzie dokładnie nierówność Minkowskiego. Dowód dla całek jest identyczny, tylko zamiast sumowania jest całkowanie. $\square$

Udowodniliśmy właśnie brakującą podaddytywność norm $\|\cdot\|_p$.

Twierdzenie. Przestrzenie ℓ^p i $L^p(\mu)$ dla $1 \le p \le \infty$ są zupełne (czyli Banacha).

Dowód na ćwiczeniach.

PRZESTRZEŃ ROZPIĘTA I DOMNKIĘTA PRZESTRZEŃ ROZPIĘTA.

Niech A będzie podzbiorem przestrzeni liniowo-metrycznej V. Przez $Lin(A)$ oznaczać będziemy podprzestrzeń składającą się z wszystkich kombinacji liniowych elementów z A. Jest niemal oczywiste, że jest to przetrzeń liniowa w V. Następnie, przez $\overline{Lin}(A)$ oznaczamy domknięcie przestrzeni $Lin(A)$. To również jest podprzestrzeń liniowa (to wynika z ciągłości działań). Jeśli $\overline{Lin}(A) = V$, to powiemy, że A jest *liniowo gęsty w* V.

BAZA TOPOLOGICZNA W PRZESTRZENI BANACHA

Definicja. Przeliczalny układ wektorów $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ nazwiemy *bazą topologiczną* w przestrzeni liniowo-metrycznej V jeśli każdy wektor v w tej przestrzeni można jednoznacznie przedstawić w postaci szeregu $v = \sum_n a_n e_n$.

Uwaga: Każda baza jest układem niezależnym. Jast bazą Hamela tylko w przestrzeni skończonego wymiaru. Przestrzeń posiadająca bazę topologiczną jest ośrodkowa. Baza jest zbiorem liniowo gęstym, ale nie odwrotnie (przykłady na ćwiczeniach).

PRZYKŁADY BAZ:
Baza w ℓ^p: $e_n = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, 0 \dots)$ (jedynka na n-tym miejscu).
Baza Schaudera w $C([0, 1])$:

Problem: (Stanisław Mazur, Księga Szkocka, 1936) Czy każda ośrodkowa przestrzeń Banacha ma bazę topologiczną? Odp. (Per Enflo, 1972) Nie.[1]

IZOMORFIZM, RÓWNOWAŻNOŚĆ NORM

Definicja. Dwie przestrzenie unormowane są topologicznie izomorficzne jeśli istnieje między nimi homeomorfizm liniowy. Jeśli istnieje surjektywna izometria liniowa, to przestrzenie te są izometrycznie izomorficzne.

Definicja. Dwie normy na tej samej przestrzeni są równoważne jeśli identyczność jest izomorfizmem topologicznym (czyli gdy metryki zadane przez te normy są równoważne).

Twierdzenie. Dwie normy na tej samej przestrzeni są równoważne wtedy i tylko wtedy gdy istnieją stałe $C > 0$ i $D > 0$ takie, że $C\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq D\|x\|_1$ (czyli identyczność jest lipshitzowska w obie strony, w szczególności metryki są wtedy od razu jednostajnie równoważne).

Dowód na ćwiczeniach.

[1] Za rozwiązanie tego problemu Stanisław Mazur obiecał w Księdze Szkockiej nagrodę w postaci żywej gęsi. Faktycznie, w roku 1972 odbyła się w warszawskim Centrum Banacha uroczysta ceremonia wręczenia gęsi szweckiemu matematykowi Perowi Enflo, który problem rozwiązał po 36 latach od sformułowania. Stanisław Mazur, w przeciwieństwie do wielu tragicznie zmarłych w czasie okupacji przedstawicieli tzw. Szkoły Lwowskiej, przeżył wojnę i żył do roku 1981.